

第八章 电磁波的辐射

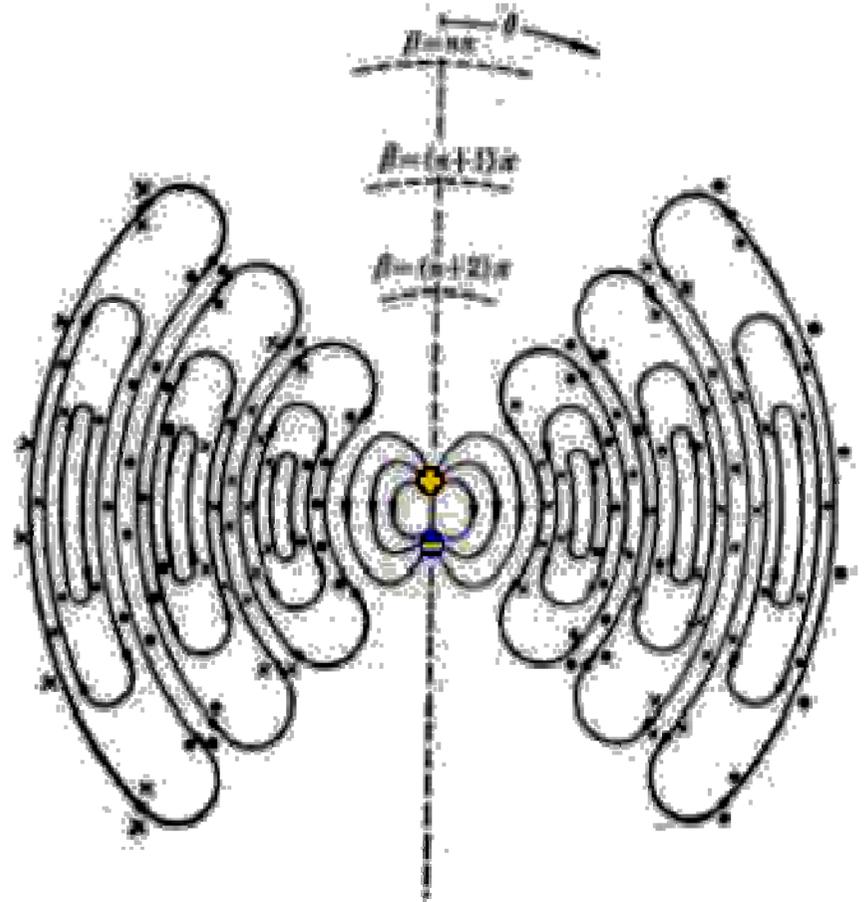
本章目录:

§ 8.1 推迟位的多级子展开

§ 8.2 电偶极矩的场

§ 8.3 磁偶极矩的场

§ 8.4 线天线的辐射场



辐射的基本概念

1. 什么是辐射？

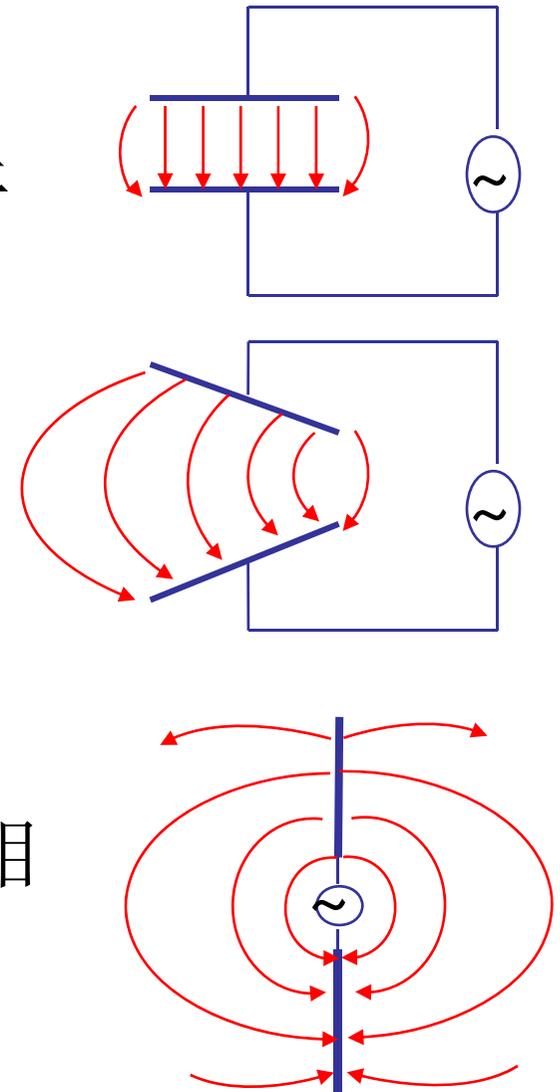
- ✦ 辐射：随时间变化的电磁场离开波源向空间传播的现象。
- ✦ 产生辐射的源称为天线。

2. 辐射产生的必要条件

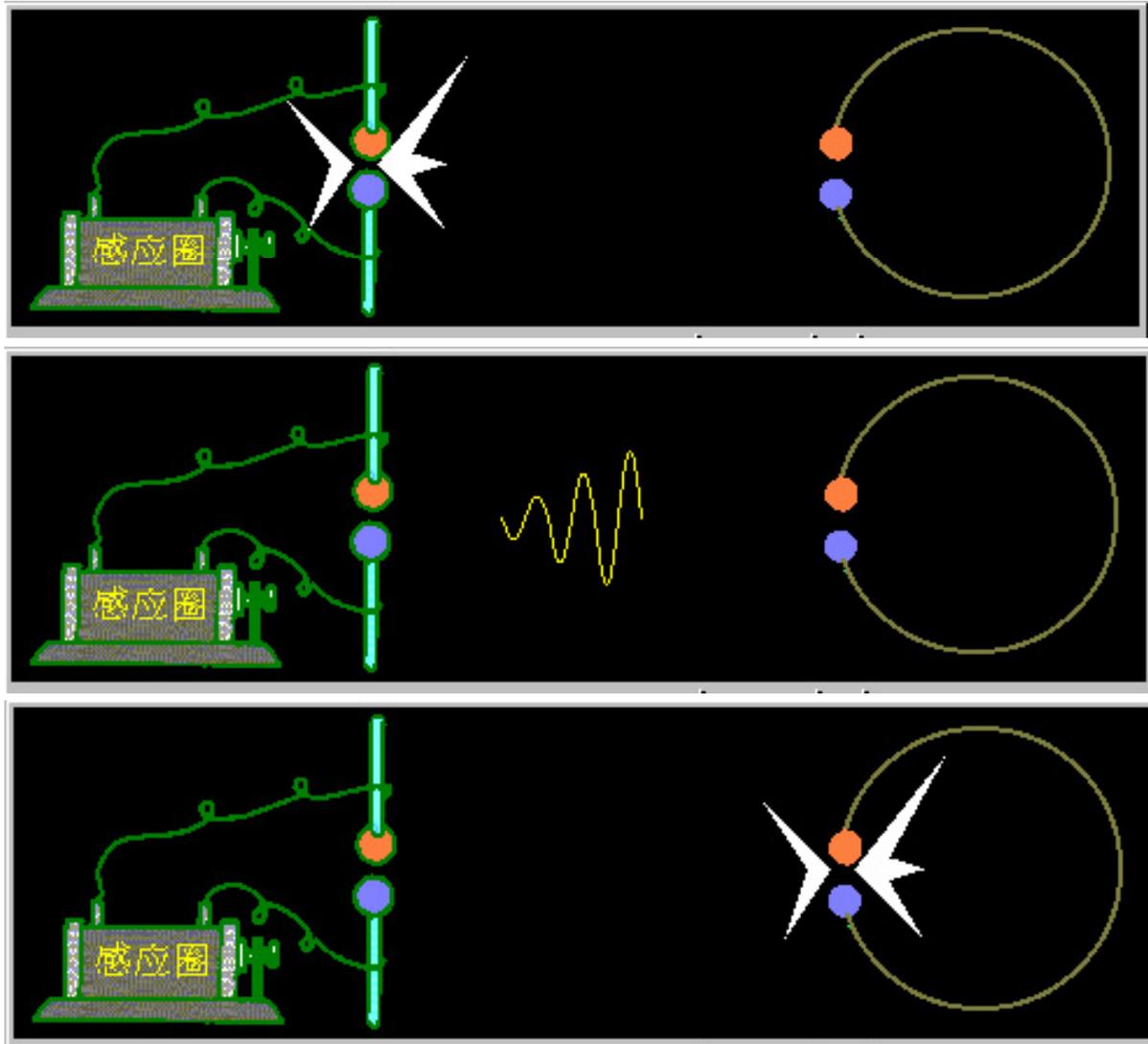
- (1) 时变源存在。
- (2) 源电路是开放的。

3. 影响辐射强弱的原因

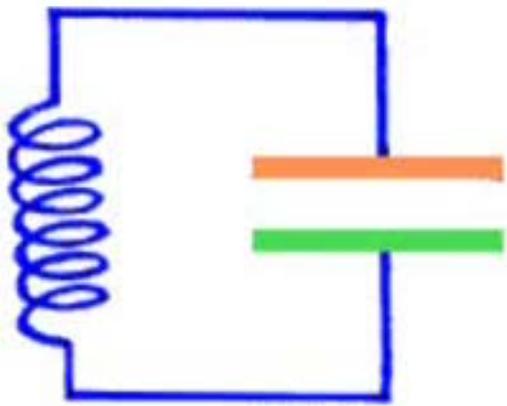
- (1) 源电路尺寸与辐射波的波长相比拟时辐射较为明显。
- (2) 源电路越开放，辐射就越强。



赫兹实验

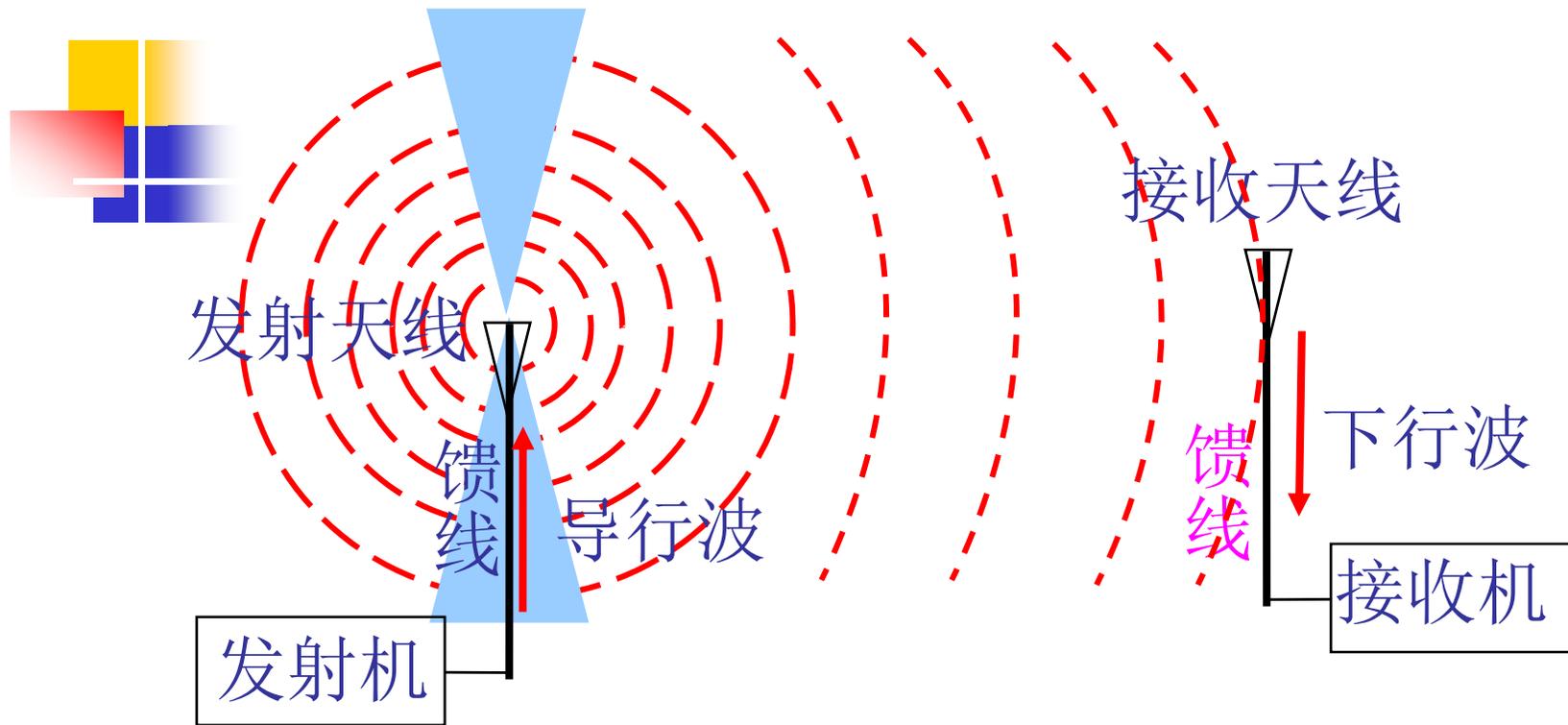


1889年,赫兹利用振荡电偶极子和共振电偶极子,进行了许多实验,结果证实了振荡电偶极子能够发射电磁波。赫兹实验证明了麦克斯韦的电磁波理论。

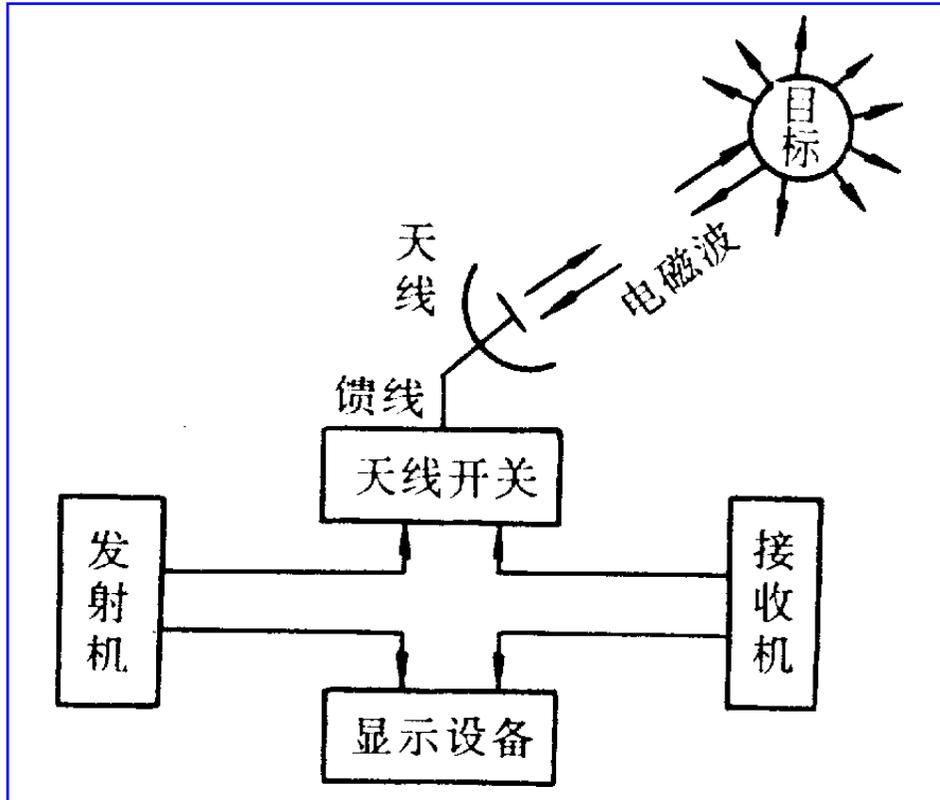
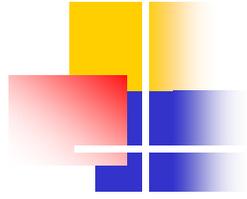


电偶极子的辐射演示

无线电广播、通信、遥测、遥控以及导航等无线电系统都是利用无线电波来传递信号的。而无线电波的发射和接收都通过天线来完成，因此天线设备是无线电系统中重要的组成部分。

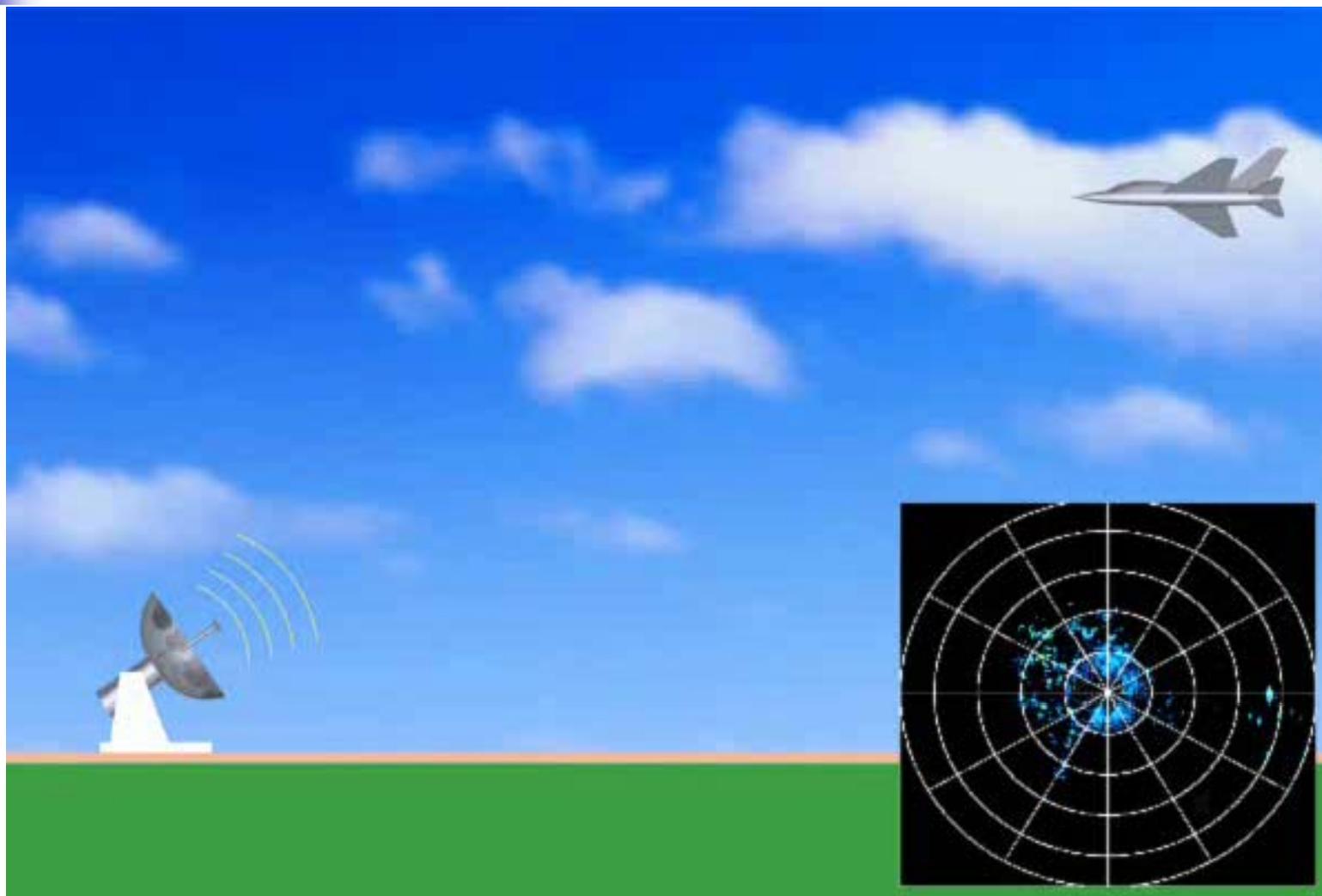


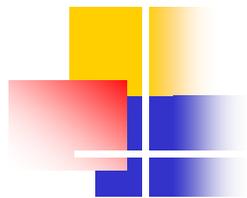
发射机末级回路产生的高频振荡电流经过馈线送到发射天线，通过发射天线将其转换成电磁波辐射出去；到了接收端，电磁波在接收天线上感生高频振荡电流，再经馈线将高频振荡电流送到接收机输入回路，这就完成了信息的传递。在这个过程中，经历了电磁波的**传输、发射、传播、接收**等过程。



左图为无线电定位系统的基本方框图。发射天线和接收天线常合用一副天线，利用天线开关的转换作用，分别接入发射机和接收机。当天线与发射机接通时，此天线作发射天线用；当天线与接收机接通时，此天线作接收天线用。

雷达探测目标演示





§ 8.1 推迟位的多极子展开

研究范围：真空中的时谐场， ρ ， \dot{J} 分布在有限区域， $\omega \neq 0$ 。

$\omega = 0$ ，为静电磁场， $E \sim \frac{1}{r^2}$ ， $H \sim \frac{1}{r^3}$

当 $r \rightarrow \infty$ （远区场）， $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \sim \frac{1}{r^5}$ ， $\oint_S \vec{S} \cdot d\vec{S} \rightarrow 0$

$\omega \neq 0$ ，为时变场， $E \sim \frac{1}{r}$ ， $H \sim \frac{1}{r}$ （因存在二次场源）

当 $r \rightarrow \infty$ （远区场）， $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \sim \frac{1}{r^2}$ ， $\oint_S \vec{S} \cdot d\vec{S} \neq 0$

§ 8.1 推迟位的多极子展开

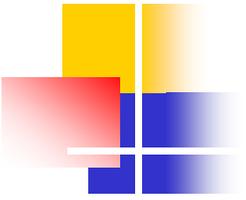
根据电荷守恒定律和洛仑兹规范

① ρ 由 $\dot{\vec{J}}$ 决定 ② ϕ 由 $\dot{\vec{A}}$ 决定

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}', t - \frac{R}{C})}{R} dV'$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}')}{R} e^{-jkR} dV' \quad \text{其中 } R = |\vec{r} - \vec{r}'|$$

$$\therefore \dot{\vec{B}} = \nabla \times \dot{\vec{A}} \Rightarrow \dot{\vec{H}} = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \dot{\vec{A}})$$



§ 8.1 推迟位的多极子展开

$$\text{无源区域 } \nabla \times \dot{H} = j\omega\epsilon_0 \dot{E} \Rightarrow \dot{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon_0} \nabla \times \dot{H}$$

$$\Rightarrow \dot{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon_0\mu_0} \nabla \times \nabla \times \dot{A} = \frac{1}{j\omega\epsilon_0\mu_0} [-\nabla^2 \dot{A} + \nabla(\nabla \cdot \dot{A})]$$

$\nabla^2 \dot{A} + k^2 \dot{A} = 0$ (无源区域)

$$= \frac{1}{j\omega\epsilon_0\mu_0} [k^2 \dot{A} + \nabla(\nabla \cdot \dot{A})]$$

$$\left\{ \text{或由 } \dot{E} = -j\omega\dot{A} - \nabla\phi = -j\omega\dot{A} + \frac{\nabla(\nabla \cdot \dot{A})}{j\omega\epsilon_0\mu_0} \right\}$$

§ 8.1 推迟位的多极子展开

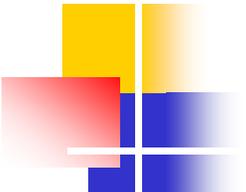
$$\text{由 } f(\vec{r} - \vec{r}') = f(\vec{r}) - \vec{r}' \cdot \nabla f(\vec{r}) + \dots$$

$$\text{可知: } f(\vec{r}) = \frac{e^{-jkr}}{r}$$

$$\begin{aligned} \nabla f(\vec{r}) &= \nabla \left(\frac{1}{r} \right) e^{-jkr} + \frac{1}{r} \nabla e^{-jkr} = \frac{-\vec{r}}{r^3} e^{-jkr} + \frac{1}{r} e^{-jkr} (-jk) \nabla r \\ &= \frac{-\vec{r}}{r^3} (1 + jkr) e^{-jkr} \quad \text{其中: } \nabla r = \frac{\vec{r}}{r} \end{aligned}$$

$$\left(\text{或用 } \nabla f = \frac{d}{dr} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \nabla r \text{ 推导} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{e^{-jkr}}{r} = \frac{e^{-jkr}}{r} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} (1 + jkr) e^{-jkr} + \dots$$



§ 8.1 推迟位的多极子展开

其条件：① $r' \ll r$ ② $kr' \ll 2\pi$ ，即 $r' \ll \lambda$

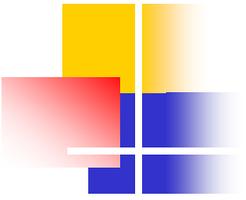
即忽略电荷电流分布所在区域内的相位滞后效应

原因： $R = |\vec{r} - \vec{r}'| = r - \vec{r}' \cdot \frac{\vec{r}}{r} + \dots$ ，幅度的大小可以根据相对大小来取舍，而相位必须绝对值较小才能忽略

$$\dot{\vec{A}} = \dot{\vec{A}}_1 + \dot{\vec{A}}_2$$

$$\dot{\vec{A}}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \int_V \dot{\vec{J}}(\vec{r}') dV'$$

$$\dot{\vec{A}}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(1 + jkr)}{r^2} e^{-jkr} \int_V (\hat{r} \cdot \vec{r}') \dot{\vec{J}}(\vec{r}') dV'$$



§ 8.2 电偶极矩的场 $\dot{\bar{A}}_1$

$$\begin{aligned} \text{由} \int_V \dot{\bar{J}}(\bar{r}') dV' &= \int_V (\dot{\bar{J}} \cdot \nabla') \bar{r}' dV' \\ &= - \int_V \bar{r}' (\nabla' \cdot \dot{\bar{J}}) dV' + \oint_S (\hat{n} \cdot \dot{\bar{J}}) \bar{r}' dS \end{aligned}$$

$$\left(\begin{aligned} (\dot{\bar{J}} \cdot \nabla) \bar{r} &= (\dot{J}_x \frac{\partial}{\partial x} + \dot{J}_y \frac{\partial}{\partial y} + \dot{J}_z \frac{\partial}{\partial z})(x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}) \\ &= \dot{J}_x \hat{x} + \dot{J}_y \hat{y} + \dot{J}_z \hat{z} = \dot{\bar{J}} \\ \int_V [\bar{b}(\nabla \cdot \bar{a}) + (\bar{a} \cdot \nabla) \bar{b}] dV &= \oint_S (\hat{n} \cdot \bar{a}) \bar{b} dS \end{aligned} \right)$$

$$\Rightarrow \int_V \dot{\bar{J}}(\bar{r}') dV' \stackrel{\nabla' \cdot \dot{\bar{J}} + j\omega \dot{\rho} = 0}{=} j\omega \int_V \bar{r}' \dot{\rho} dV' = j\omega \dot{\bar{p}}$$

§ 8.2 电偶极矩的场 $\dot{\vec{A}}_1$

$$\therefore \dot{\vec{A}}_1 = \frac{j\omega\mu_0}{4\pi r} e^{-jkr} \dot{\vec{p}},$$

$$\text{其中电偶极距 } \dot{\vec{p}} = \int_V \vec{r}' \dot{\rho} dV' = \frac{1}{j\omega} \int_V \dot{\vec{J}}(\vec{r}') dV'$$

即 $\dot{\vec{A}}_1$ 代表了一个时谐的电偶极矩产生的电磁场。

$$\begin{aligned} \dot{\vec{H}} &= \frac{1}{\mu_0} \left(\nabla \times \dot{\vec{A}}_1 \right) = \frac{j\omega}{4\pi} \nabla \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \times \dot{\vec{p}} \\ &= \frac{-j\omega}{4\pi} (1 + jkr) e^{-jkr} \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \times \dot{\vec{p}} \right) \\ &= -\frac{j\omega}{4\pi} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{jk}{r} \right) (\hat{r} \times \dot{\vec{p}}) e^{-jkr} \end{aligned}$$

§ 8.2 电偶极矩的场 $\dot{\hat{A}}_1$

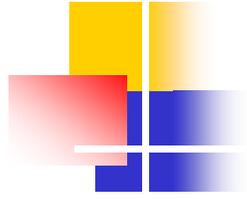
无源区域

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}} &= \frac{1}{j\omega\epsilon_0} \nabla \times \dot{\vec{H}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \times \left[(1 + jkr) e^{-jkr} \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \times \dot{\vec{p}} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \nabla \left[(1 + jkr) e^{-jkr} \right] \times \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \times \dot{\vec{p}} \right) + (1 + jkr) e^{-jkr} \nabla \times \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \times \dot{\vec{p}} \right) \right\} \end{aligned}$$

其中 $\nabla \left[(1 + jkr) e^{-jkr} \right] = [jke^{-jkr} + (1 + jkr)e^{-jkr} (-jk)] \frac{\vec{r}}{r} = k^2 e^{-jkr} \vec{r}$

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \times \dot{\vec{p}} \right) = \frac{\dot{\vec{p}}}{r^3} - \frac{3(\dot{\vec{p}} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} \quad (\text{与静磁场中的推导相同})$$

$$\therefore \dot{\vec{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ k^2 (\hat{r} \times \dot{\vec{p}}) \times \hat{r} \frac{e^{-jkr}}{r} + [3(\dot{\vec{p}} \cdot \hat{r})\hat{r} - \dot{\vec{p}}] \left[\frac{1}{r^3} + \frac{jk}{r^2} \right] e^{-jkr} \right\}$$



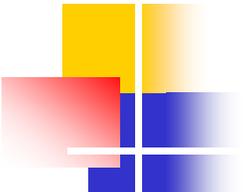
§ 8.2 电偶极矩的场 $\dot{\mathbf{A}}_1$

根据 kr 的大小可分为近区、中间区、远区。

说明：实际上满足多极展开条件

$$\textcircled{1} r' \ll r \quad \textcircled{2} kr' \ll 2\pi, \text{ 即 } r' \ll \lambda$$

都已为远区，上面的分区是在多极展开的远区再分成近区、中间区、远区。

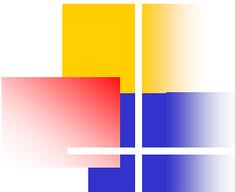


§ 8.2 电偶极矩的场 $\dot{\mathbf{A}}_1$

(1) 近区（准静态区） $kr \ll 2\pi \Rightarrow r \ll \lambda$ ，即 $r' \ll r \ll \lambda$
可以只保留最大项，且忽略相位因子

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{E}} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [3(\dot{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{p}}] \\ \dot{\mathbf{H}} \approx -\frac{j\omega}{4\pi r^2} (\hat{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{p}}) \end{array} \right.$$

可见：电场和磁场的相位相差 90° ，因此能量在电场和磁场相互交换而平均坡印廷矢量为零，该区域的场称为感应场。



§ 8.2 电偶极矩的场 \dot{A}_1

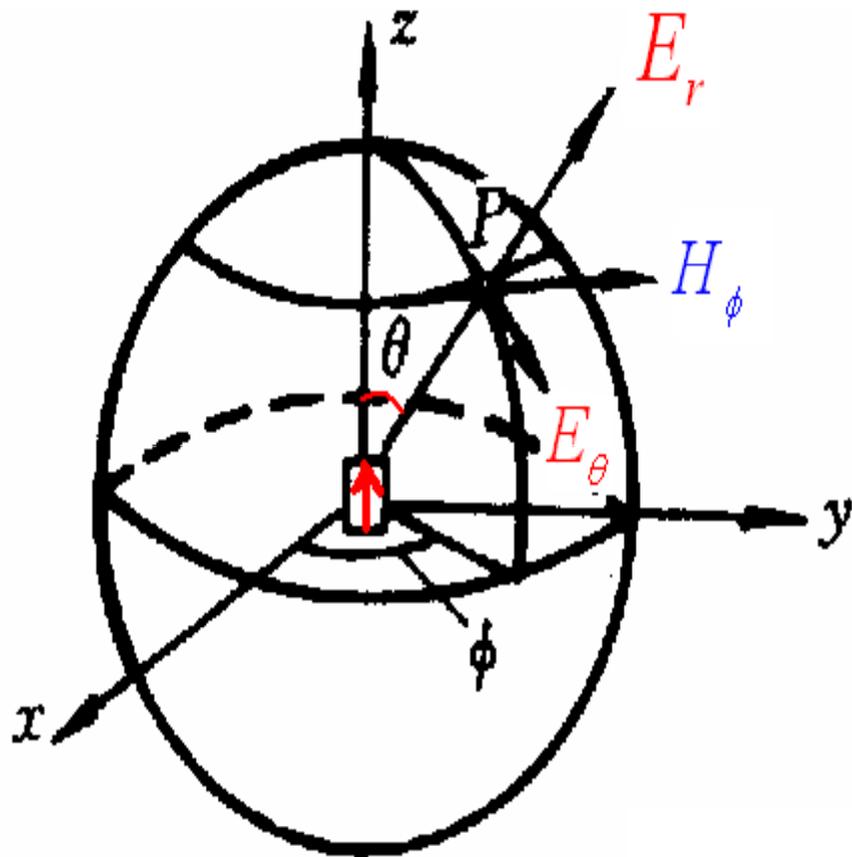
在准静态区，电场强度与静电场中电偶极子产生的场形式相同，且电场强度比磁场强度大一个数量级，当频率趋向于零时，磁场强度趋向于零，而电场强度不趋向于零。当频率不为零时，虽然电场和磁场都存在，但当频率不高时磁场很小。

$\dot{p} = p\hat{z}$ 时，近区中的电磁场分布为

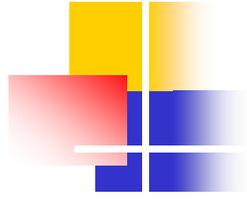
$$\dot{\vec{E}} = \hat{r} \frac{2\dot{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cos\theta + \hat{\theta} \frac{\dot{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sin\theta$$

$$\dot{\vec{H}} = \hat{\phi} \frac{j\omega\dot{p} \sin\theta}{4\pi r^2}$$

§ 8.2 电偶极矩的场 $\dot{\mathbf{A}}_1$



在近区中，时变电基本振子的电场与静电场中电偶极子的电场分布相似；其磁场的分布与稳恒磁场中电流元的磁场分布相似。因此将近区称为“似稳场”，且电场与磁场有 $\pi/2$ 的相位差。



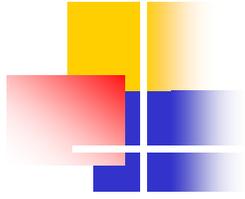
§ 8.2 电偶极矩的场 $\dot{\mathbf{A}}_1$

(2) 中间区 (感应区) $kr \sim 2\pi \Rightarrow r \sim \lambda$,

即 $r' \ll r \sim \lambda$

不能近似

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \begin{aligned} &k^2 (\hat{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{p}}) \times \hat{\mathbf{r}} \frac{e^{-jkr}}{r} \\ &+ [3(\dot{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{p}}] \left[\frac{1}{r^3} + \frac{jk}{r^2} \right] e^{-jkr} \end{aligned} \right\}$$
$$\dot{\mathbf{H}} = -\frac{j\omega}{4\pi} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{jk}{r} \right) (\hat{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{p}}) e^{-jkr}$$



§ 8.2 电偶极矩的场 \dot{A}_1

(3) 远区（辐射区） $kr \gg 2\pi \Rightarrow r \gg \lambda$, 即 $r' \ll \lambda \ll r$

近似为

$$\begin{cases} \dot{\vec{E}} = \frac{k^2}{4\pi\epsilon_0} (\hat{r} \times \dot{\vec{p}}) \times \hat{r} \frac{e^{-jkr}}{r} = \frac{k^2}{4\pi\epsilon_0} [\dot{\vec{p}} - (\hat{r} \cdot \dot{\vec{p}})\hat{r}] \frac{e^{-jkr}}{r} \\ \dot{\vec{H}} = \frac{k\omega}{4\pi} (\hat{r} \times \dot{\vec{p}}) \frac{e^{-jkr}}{r} \end{cases}$$

辐射场的特点：

- ① 辐射场为球面波（等相位面为球面，等振幅面不是球面）
为横电磁波（TEM波）

§ 8.2 电偶极矩的场 \dot{A}_1

② 定义 $\vec{k} = k\hat{r}$ 为传播矢量

⎧ 方向：代表传播方向

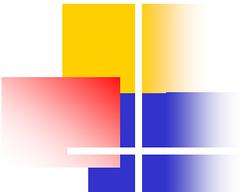
⎩ 大小：传播方向的相位常数

$$\Rightarrow e^{-jkr} = e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$\text{由 } \frac{k^2}{4\pi\epsilon_0} = \frac{k}{w\epsilon_0} \frac{k w}{4\pi} = \eta_0 \frac{k w}{4\pi}$$

其中 $\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ 为真空中的波阻抗

$$\hat{r} \times [(\hat{r} \times \dot{\vec{p}}) \times \hat{r}] = (\hat{r} \times \dot{\vec{p}})(\hat{r} \cdot \hat{r}) - \hat{r} [(\hat{r} \times \dot{\vec{p}}) \cdot \hat{r}] = \hat{r} \times \dot{\vec{p}}$$

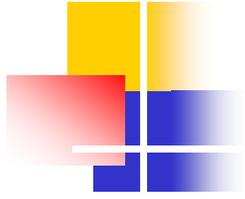


§ 8.2 电偶极矩的场 $\dot{\hat{A}}_1$

$$\begin{aligned}\dot{\hat{H}} &= \frac{k\omega}{4\pi} (\hat{r} \times \dot{\hat{p}}) \frac{e^{-jkr}}{r} = \frac{1}{\eta_0} \frac{k^2}{4\pi\epsilon_0} \hat{r} \times \left[(\hat{r} \times \dot{\hat{p}}) \times \hat{r} \right] \frac{e^{-jkr}}{r} \\ &= \frac{1}{\eta_0} (\hat{r} \times \dot{\hat{E}})\end{aligned}$$

$$\text{即: } \begin{cases} \dot{\hat{E}} = \eta_0 (\dot{\hat{H}} \times \hat{r}) \\ \dot{\hat{H}} = \frac{1}{\eta_0} (\hat{r} \times \dot{\hat{E}}) \end{cases}$$

由于这个关系式，平面波的一系列特点对电偶极矩的辐射场依然有效，如：电场强度的某一分量和与它垂直的磁场强度分量之比（无论是瞬时值还是复数值）都是 $\pm\eta$ ，如果二者叉乘与传播方向相同时取正号，相反时取负号。



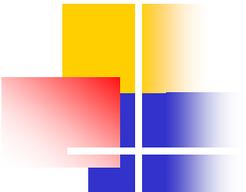
§ 8.2 电偶极矩的场 \dot{A}_1

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\eta_0} |\vec{E}(\vec{r}, t)|^2 \hat{r} = \eta_0 |\vec{H}(\vec{r}, t)|^2 \hat{r}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{2\eta_0} |\dot{\vec{E}}|^2 \hat{r} = \frac{1}{2} \eta_0 |\dot{\vec{H}}|^2 \hat{r}$$

与平面波的区别：

- ① 等振幅面不是平面，也不是球面。
- ② \vec{E} 、 \vec{H} 表达式不一样，但相互关系一样。



§ 8.2 电偶极矩的场 $\dot{\vec{A}}_1$

③ $\nabla \rightarrow -j\vec{k}$ (仅对辐射场成立)

$$\dot{\vec{A}}_1 = \frac{j\omega\mu_0\dot{\vec{p}}}{4\pi r} e^{-jkr}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{H}} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \dot{\vec{A}}_1 = \frac{-j\vec{k}}{\mu_0} \times \dot{\vec{A}}_1 = \frac{k\omega}{4\pi} (\hat{r} \times \dot{\vec{p}}) \frac{e^{-jkr}}{r}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{E}} \stackrel{\text{无源区域}}{=} \frac{1}{j\omega\epsilon_0} \nabla \times \dot{\vec{H}} = \frac{-j\vec{k}}{j\omega\epsilon_0} \times \dot{\vec{H}} = \eta_0 (\dot{\vec{H}} \times \hat{r})$$

§ 8.2 电偶极矩的场 $\dot{\mathbf{A}}_1$

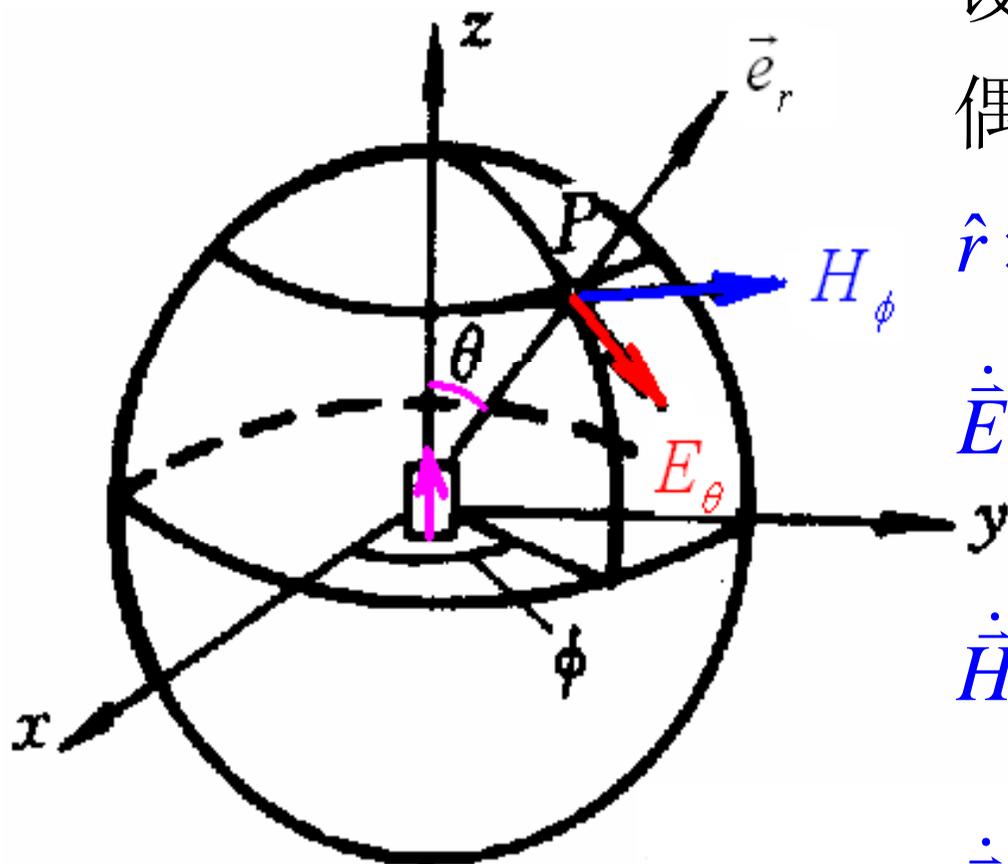
设 $\dot{\mathbf{p}} = \dot{p}\hat{z}$ (任意方向的单个电偶极子都可以取为 z 方向)

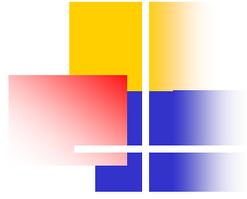
$$\hat{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{p}} = -\dot{p} \sin \theta \hat{\phi}$$

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{-k^2}{4\pi\epsilon_0} \dot{p} \sin \theta \frac{e^{-jkr}}{r} \hat{\theta}$$

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{-k\omega}{4\pi} \dot{p} \sin \theta \frac{e^{-jkr}}{r} \hat{\phi}$$

$$\dot{\mathbf{A}}_1 = \frac{j\omega\mu_0}{4\pi} \dot{p} \frac{e^{-jkr}}{r} \hat{z}$$





§ 8.2 电偶极矩的场 \dot{A}_1

方向性： 研究辐射场的场量（电场、磁场、能流密度）随方向不同变化的情况。

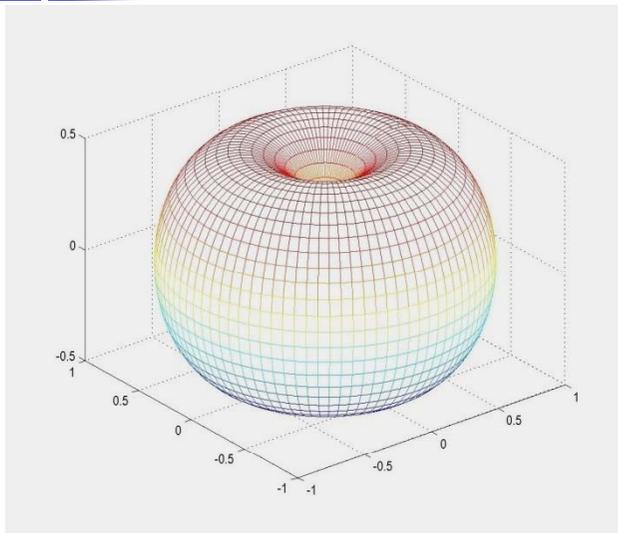
电场强度的归一化方向性函数 $F(\theta, \varphi) = \frac{|\dot{E}(\theta, \varphi)|}{|\dot{E}_{\max}|} = \sin \theta$

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \eta_0 \left| \dot{H} \right|^2 \hat{r} \stackrel{k=w/C}{=} \frac{\eta_0 w^4}{32 \pi^2 C^2} |\dot{p}|^2 \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \hat{r}$$

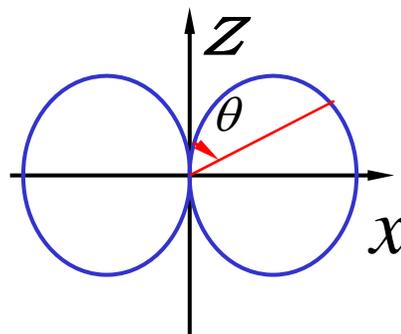
r 固定时： $\theta = 0, \pi \rightarrow |\bar{S}| = 0$; $\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow |\bar{S}|$ 最大; $\theta = \text{常数} \rightarrow |\bar{S}| = \text{常数}$

显然, $|\bar{S}|$ 与 xy 平面的 φ 角无关, 关于 z 轴对称, 即辐射场的平均能流密度在垂直 z 轴的平面内是圆对称的。

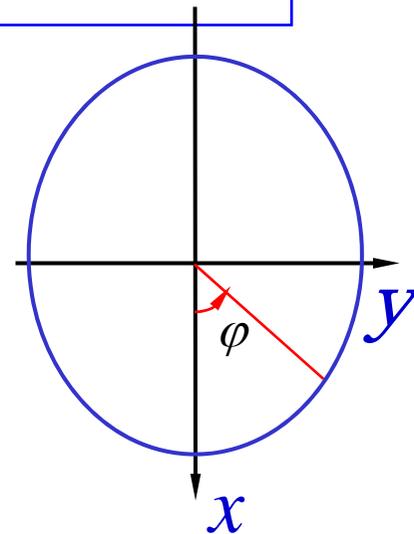
§ 8.2 电偶极矩的场 $\dot{\vec{A}}_1$



电偶极子的方向图



E 面方向图



H 面方向图

总辐射功率在一个周期的平均值:

$$P = \oint_S \bar{\vec{S}} \cdot d\vec{S} = \frac{\eta_0 w^4}{32\pi^2 C^2} |\dot{p}|^2 \oint_S \frac{\sin^2 \theta}{r^2} r^2 \sin \theta d\theta d\phi = \frac{\eta_0 w^4}{12\pi C^2} |\dot{p}|^2$$

§ 8.2 电偶极矩的场 $\dot{\mathbf{A}}_1$

例：线电流元 $\dot{I}dl$, $\dot{I} = \dot{I}_0$, 求总辐射功率在一个周期的平均值 P

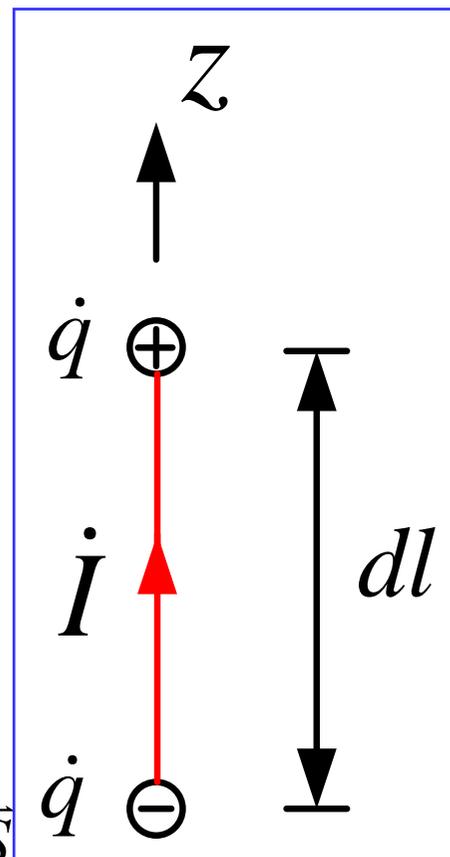
解：先求电偶极矩

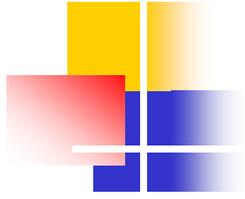
$$\dot{\mathbf{p}} = \int_V \bar{\mathbf{r}} \dot{\rho}(\bar{\mathbf{r}}) dV = \frac{1}{j\omega} \int_V \dot{\mathbf{J}}(\bar{\mathbf{r}}) dV = \frac{1}{j\omega} \int_{dl} \dot{I} \hat{\mathbf{z}} dl = \frac{\dot{I}_0 dl}{j\omega} \hat{\mathbf{z}}$$

或者：由于电流线中断，根据电荷守恒原理，两端必然有电荷积累

$$\dot{q} = \int_V \dot{\rho}(\bar{\mathbf{r}}) dV = -\frac{1}{j\omega} \int_V \nabla \cdot \dot{\mathbf{J}}(\bar{\mathbf{r}}) dV = -\frac{1}{j\omega} \oint_S \dot{\mathbf{J}}(\bar{\mathbf{r}}) \cdot d\bar{\mathbf{S}}$$

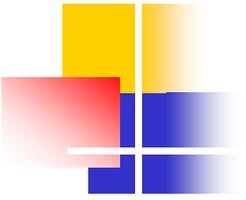
$$= \frac{\dot{I}}{j\omega} = \frac{\dot{I}_0}{j\omega} \Rightarrow \dot{\mathbf{p}} = \frac{\dot{I}_0 dl}{j\omega} \hat{\mathbf{z}}$$





§ 8.2 电偶极矩的场 \dot{A}_1

$$\begin{aligned} P &= \frac{\eta_0 \omega^4}{12\pi C^2} \frac{(dl)^2}{\omega^2} |\dot{I}_0|^2 \stackrel{\eta_0=120\pi}{=} 10 \frac{\omega^2}{C^2} (dl)^2 |\dot{I}_0|^2 \\ &= 10k^2 (dl)^2 |\dot{I}_0|^2 = 40\pi \left(\frac{dl}{\lambda} \right)^2 |\dot{I}_0|^2 \end{aligned}$$



§ 8.2 电偶极矩的场 $\dot{\mathbf{A}}_1$

辐射电阻:

单靠这么一段电流分布即使导线无损耗，也不能维持一个时谐的状态，由于电流分布向外辐射，损失能量，因此必须有其他装置补充这种辐射（一般情况也应包括导线的欧姆损耗）产生的能量损失，这个装置在天线里称为馈线系统。对于馈线系统来讲，辐射出去的能量是一种损耗，因为它消耗了系统的能量，这种损耗可以用一个等效电阻来描述，称为辐射电阻 R_r

$$P = \frac{1}{2} R_r |\dot{I}_0|^2 \Rightarrow R_r = 80\pi \left(\frac{dl}{\lambda} \right)^2$$

可见：辐射电阻表示天线的辐射能力，辐射电阻越大，天线的辐射功率越强。

§ 8.2 电偶极矩的场 $\dot{\mathbf{A}}_1$

方向性系数

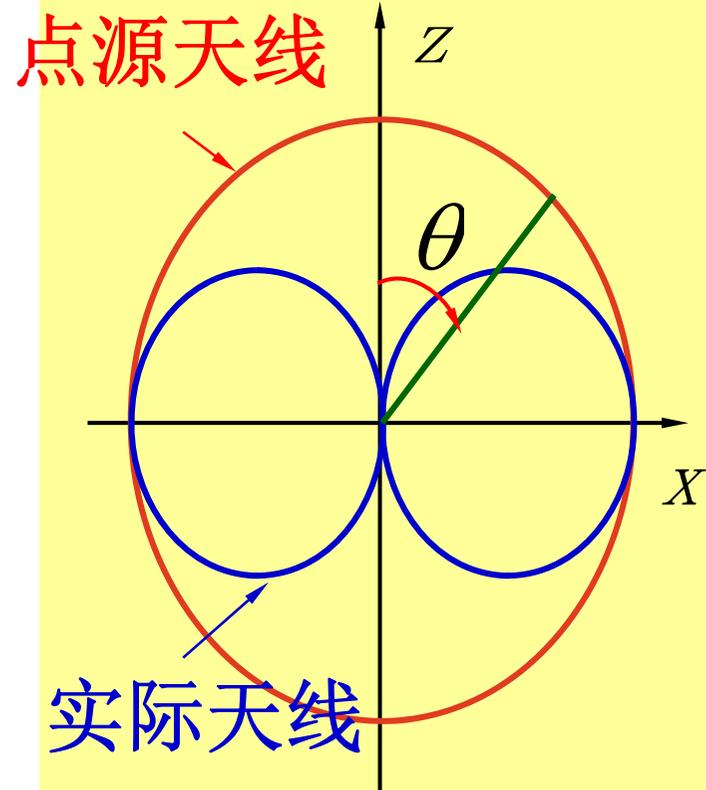
当点源天线的辐射场强与实际天线在最大辐射方向上的场强相同时，点源天线的辐射功率与实际天线的辐射功率之比为方向性系数。

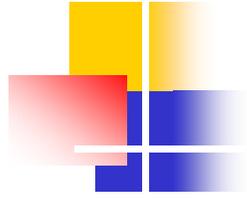
方向性系数表示为：

$$D = \frac{P_0}{P} \Big|_{E_0 = E_{\max}}$$

点源天线的总辐射功率

实际天线的总辐射功率





§ 8.2 电偶极矩的场 \dot{A}_1

对点源天线辐射而言：

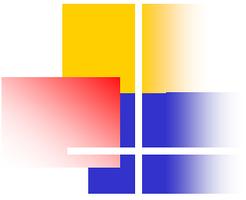
$$P_0 = \left| \bar{S} \right|_{\max} \times 4\pi r^2 = 60\pi^2 \left(\frac{dl}{\lambda} \right)^2 \left| \dot{I}_0 \right|^2$$



电偶极子的方向性系数 $D = 1.5$

另一种定义：辐射图中波印亭矢量的最大数值与波印亭矢量在整个球面上的平均值之比，即

$$D = \frac{S_{\max}}{\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} S \sin \theta d\theta d\varphi}$$



§ 8.3 磁偶极矩的场

$$\dot{\vec{A}}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(1 + jkr)}{r^2} e^{-jkr} \int_V (\hat{r} \cdot \vec{r}') \dot{\vec{J}} dV'$$

$$\begin{aligned} (\hat{r} \cdot \vec{r}') \dot{\vec{J}}(\vec{r}') &= \frac{1}{2} \left[(\hat{r} \cdot \vec{r}') \dot{\vec{J}} - (\hat{r} \cdot \dot{\vec{J}}) \vec{r}' \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[(\hat{r} \cdot \vec{r}') \dot{\vec{J}} + (\hat{r} \cdot \dot{\vec{J}}) \vec{r}' \right] \end{aligned}$$

被积函数分解为关于 \vec{r}' , $\dot{\vec{J}}$ 的对称项和反对称项

$$\text{即 } \dot{\vec{A}}_2 = \dot{\vec{A}}_{2m} + \dot{\vec{A}}_{2q}$$

§ 8.3 磁偶极矩的场

磁偶极矩的场 $\dot{\vec{A}}_{2m}$

$$\begin{aligned}\dot{\vec{A}}_{2m} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(1 + jkr)}{r^2} e^{-jkr} \int_V \frac{1}{2} (\vec{r}' \times \dot{\vec{J}}) \times \hat{r} dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(1 + jkr)}{r^2} e^{-jkr} (\dot{\vec{m}} \times \hat{r})\end{aligned}$$

其中 $\dot{\vec{m}} = \frac{1}{2} \int_V (\vec{r}' \times \dot{\vec{J}}) dV'$ 为电流分布的磁偶极矩

$$\begin{aligned}\dot{\vec{H}} &= \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \dot{\vec{A}}_{2m} = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \left[(1 + jkr) e^{-jkr} (\dot{\vec{m}} \times \frac{\vec{r}}{r^3}) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \left\{ k^2 (\hat{r} \times \dot{\vec{m}}) \times \hat{r} \frac{e^{-jkr}}{r} + [3(\dot{\vec{m}} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \dot{\vec{m}}] \left[\frac{1}{r^3} + \frac{jk}{r^2} \right] e^{-jkr} \right\}\end{aligned}$$

§ 8.3 磁偶极矩的场

$$\dot{\vec{E}} = \frac{1}{j\omega\mu_0\epsilon_0} \left\{ k^2 \dot{\vec{A}}_{2m} + \nabla(\nabla \cdot \dot{\vec{A}}_{2m}) \right\}$$

$$\text{其中 } \nabla \cdot \dot{\vec{A}}_{2m} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \cdot \left[\underline{(1 + jkr)e^{-jkr}} \underline{\left(\dot{\vec{m}} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right)} \right]$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \nabla[(1 + jkr)e^{-jkr}] \cdot \left(\dot{\vec{m}} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right) + (1 + jkr)e^{-jkr} \nabla \cdot \left(\dot{\vec{m}} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla[(1 + jkr)e^{-jkr}] \cdot \left(\dot{\vec{m}} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right) &= k^2 e^{-jkr} \vec{r} \cdot \left(\dot{\vec{m}} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = 0 \\ \nabla \cdot \left(\dot{\vec{m}} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right) &= -\dot{\vec{m}} \cdot (\nabla \times \frac{\vec{r}}{r^3}) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nabla \cdot \dot{\vec{A}}_{2m} = 0$$

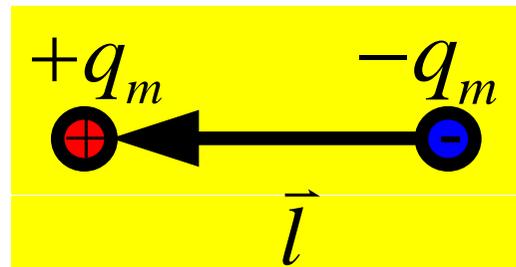
§ 8.3 磁偶极矩的场

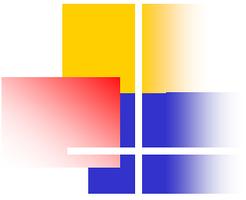
$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{\vec{E}} &= \frac{1}{j\omega\mu_0\epsilon_0} k^2 \dot{\vec{A}}_{2m} = \frac{j\omega\mu_0}{4\pi} \frac{(1+jkr)}{r^2} (\hat{r} \times \dot{\vec{m}}) e^{-jkr} \\ &= \frac{j\omega\mu_0}{4\pi} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{jk}{r} \right) (\hat{r} \times \dot{\vec{m}}) e^{-jkr} \end{aligned}$$

也可用对偶关系来推导电偶极距 $\dot{\vec{p}} \leftrightarrow$ 磁偶极距 $\dot{\vec{p}}_m$

$\dot{\vec{E}}$	\leftrightarrow	$\dot{\vec{H}}$	$\dot{\vec{H}}$
μ_0	\leftrightarrow	ϵ_0	ϵ_0
$k = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$	\leftrightarrow	k	$\dot{\vec{p}}$
η_0	\leftrightarrow	$\frac{1}{\eta_0}$	C

$$\dot{\vec{p}}_m = \int_V \vec{r} \rho_m dV$$



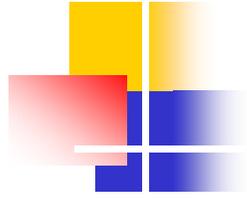


§ 8.3 磁偶极矩的场

(1) 近区（准静态区） $kr \ll 2\pi \Rightarrow r \ll \lambda$ ，即 $r' \ll r \ll \lambda$
可以只保留最大项，且忽略相位因子

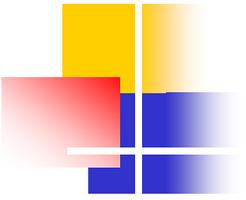
$$\begin{cases} \dot{\vec{E}} \approx -\frac{j\omega\mu_0}{4\pi r^2}(\hat{r} \times \dot{\vec{m}}) \\ \dot{\vec{H}} \approx \frac{1}{4\pi r^3}[3(\dot{\vec{m}} \cdot \hat{r})\hat{r} - \dot{\vec{m}}] \end{cases}$$

可见：电场和磁场的相位相差 90° ，因此能量在电场和磁场相互交换而平均坡印廷矢量为零，该区域的场称为感应场。



§ 8.3 磁偶极矩的场

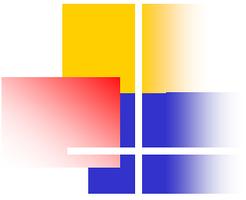
在准静态区，磁场强度与静磁场中磁偶极矩产生的场形式相同，且磁场强度比电场强度大一个数量级，当频率趋向于零时，电场强度趋向于零，而磁场强度不趋向于零。当频率不为零时，虽然电场和磁场都存在，但当频率不高时电场很小。



§ 8.3 磁偶极矩的场

(2) 中间区（感应区） $kr \sim 2\pi \Rightarrow r \sim \lambda$ ，即 $r' \ll r \sim \lambda$
不能近似

$$\begin{cases} \dot{\vec{E}} = \frac{j\omega\mu_0}{4\pi} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{jk}{r} \right) (\hat{r} \times \dot{\vec{m}}) e^{-jkr} \\ \dot{\vec{H}} = \frac{1}{4\pi} \left\{ k^2 (\hat{r} \times \dot{\vec{m}}) \times \hat{r} \frac{e^{-jkr}}{r} + [3(\dot{\vec{m}} \cdot \hat{r})\hat{r} - \dot{\vec{m}}] \left[\frac{1}{r^3} + \frac{jk}{r^2} \right] e^{-jkr} \right\} \end{cases}$$



§ 8.3 磁偶极矩的场

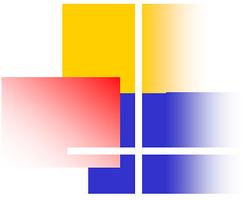
(3) 远区（辐射区） $kr \gg 2\pi \Rightarrow r \gg \lambda$ ，即 $r' \ll \lambda \ll r$

近似为

$$\begin{cases} \dot{\vec{E}} = \frac{k\omega\mu_0}{4\pi} (\dot{\vec{m}} \times \hat{r}) \frac{e^{-jkr}}{r} \\ \dot{\vec{H}} = \frac{k^2}{4\pi} \hat{r} \times (\dot{\vec{m}} \times \hat{r}) \frac{e^{-jkr}}{r} \end{cases}$$

辐射场的特点：

- ① 辐射场为球面波（等相位面为球面，等振幅面不是球面）为横电磁波（TEM波）



§ 8.3 磁偶极矩的场

$$\textcircled{2} \begin{cases} \dot{\vec{E}} = \eta_0 (\dot{\vec{H}} \times \hat{r}) \\ \dot{\vec{H}} = \frac{1}{\eta_0} (\hat{r} \times \dot{\vec{E}}) \end{cases}$$

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\eta_0} |\vec{E}(\vec{r}, t)|^2 \hat{r} = \eta_0 |\vec{H}(\vec{r}, t)|^2 \hat{r}$$

$$\bar{\vec{S}} = \frac{1}{2\eta_0} |\dot{\vec{E}}|^2 \hat{r} = \frac{1}{2} \eta_0 |\dot{\vec{H}}|^2 \hat{r}$$

$$\textcircled{3} \nabla \rightarrow -j\vec{k} \text{ (仅对辐射场成立)}$$

§ 8.3 磁偶极矩的场

设 $\dot{\mathbf{m}} = \dot{m}\hat{z}$ (任意方向的单个磁偶极子都可以取为z方向)

$$\dot{\mathbf{A}}_1 = \frac{j\omega\mu_0}{4\pi} \dot{m} \sin\theta \frac{e^{-jkr}}{r} \hat{\phi}$$

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{\omega\mu_0 k}{4\pi} \dot{m} \sin\theta \frac{e^{-jkr}}{r} \hat{\phi} \quad \dot{\mathbf{H}} = \frac{-k^2}{4\pi} \dot{m} \sin\theta \frac{e^{-jkr}}{r} \hat{\theta}$$

$$\text{方向性: } \bar{\bar{S}} = \frac{1}{2\eta_0} \left| \dot{\mathbf{E}} \right|^2 \hat{r} \stackrel{k=\omega/C}{=} \frac{\omega^4 \mu_0^2}{32\pi^2 C^2 \eta_0} |\dot{m}|^2 \frac{\sin^2\theta}{r^2} \hat{r}$$

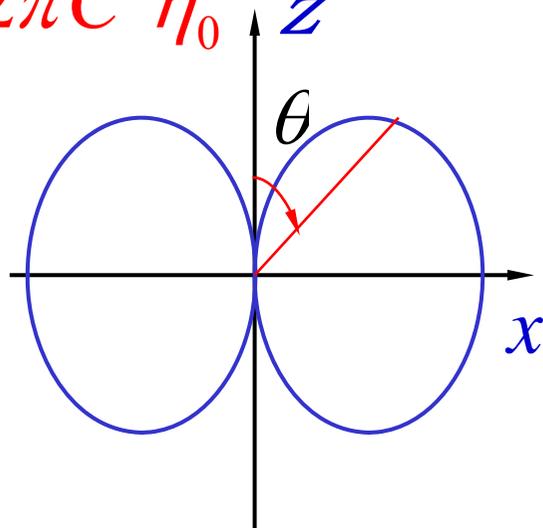
与电偶极矩辐射场相同

§ 8.3 磁偶极矩的场

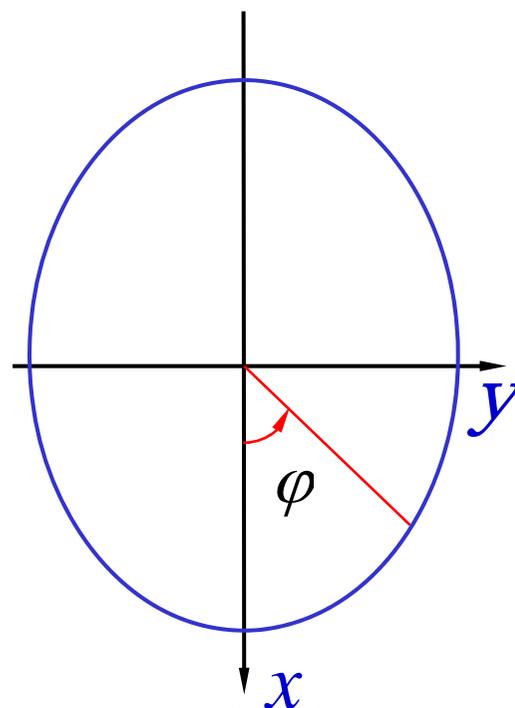
总辐射功率在一个周期的平均值:

$$P = \oint_S \bar{\mathbf{S}} \cdot d\bar{\mathbf{S}} = \frac{\omega^4 \mu_0^2}{32\pi^2 C^2 \eta_0} |\dot{m}|^2 \oint_S \frac{\sin^2 \theta}{r^2} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$= \frac{\omega^4 \mu_0^2}{12\pi C^2 \eta_0} |\dot{m}|^2 \frac{z}{z}$$



H 面方向图



E 面方向图

§ 8.3 磁偶极矩的场

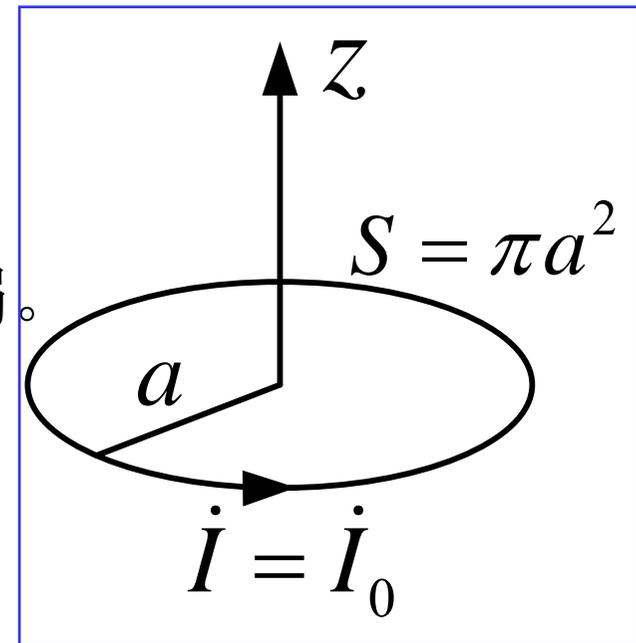
例：电流环 $\dot{I} = I_0$ ，求总辐射功率在一个周期的平均值 P

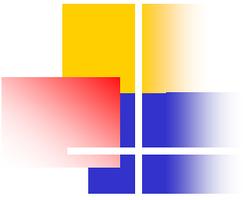
解： $\dot{m} = I_0 S \hat{z} \Rightarrow P = 160\pi^6 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^4 |\dot{I}_0|^2$

$$\Rightarrow R_r = \frac{2P}{|\dot{I}|^2} = 320\pi^6 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^4$$

可见磁偶极矩比电偶极矩的辐射能力更弱。

方向性系数： $D = \frac{P_0}{P} \Big|_{E_0 = E_{\max}} = 1.5$





§ 8.3 磁偶极矩的场

由静电静磁知识似乎多级展开应有一单极项，即忽略各电荷尺寸，看作点电荷然后得到它所产生的场，为何这里没有？

∵ $\omega \neq 0$ 时

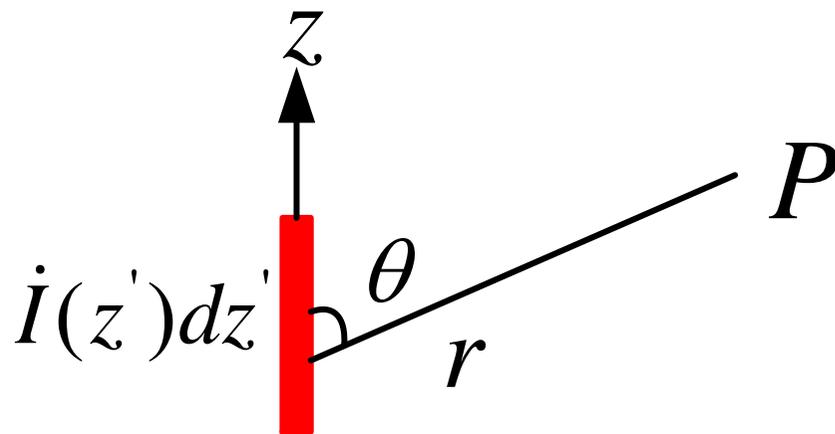
$$\dot{Q} = \int_V \dot{\rho} dV = -\frac{1}{j\omega} \int_V \nabla \cdot \dot{\mathbf{J}} dV = -\frac{1}{j\omega} \oint_S \dot{\mathbf{J}} \cdot d\vec{S} = 0$$

§ 8.4 线天线的辐射场

1、短天线 $r' \ll \lambda$

可看作电偶极距的辐射

$$\dot{\mathbf{p}} = \dot{p}\hat{z} = \frac{1}{j\omega} \int_l \dot{I}(z')\hat{z}dz'$$

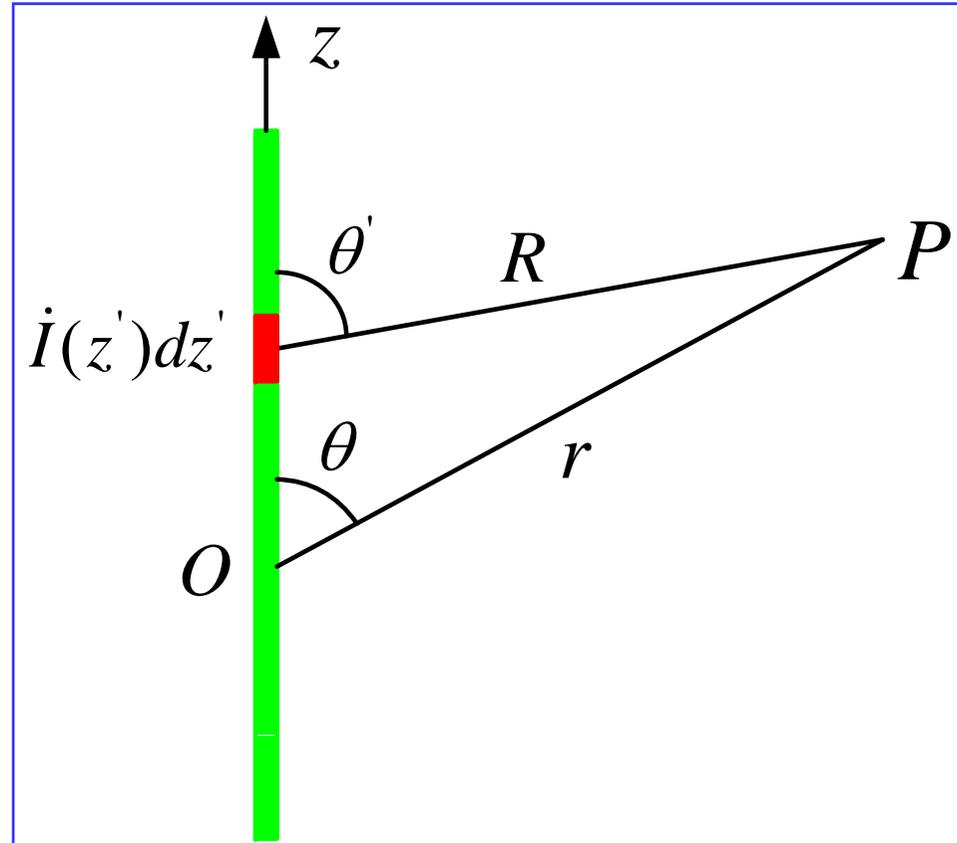


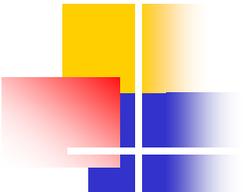
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{A}} = \dot{A}_z \hat{z} = \frac{j\omega\mu_0}{4\pi} \dot{p} \frac{e^{-jkr}}{r} \hat{z} \\ \dot{\mathbf{E}} = \dot{E}_\theta \hat{\theta} = \frac{-k^2}{4\pi\epsilon_0} \dot{p} \sin\theta \frac{e^{-jkr}}{r} \hat{\theta} \\ \dot{\mathbf{H}} = \dot{H}_\phi \hat{\phi} = \frac{-k\omega}{4\pi} \dot{p} \sin\theta \frac{e^{-jkr}}{r} \hat{\phi} \end{array} \right.$$

§ 8.4 线天线的辐射场

2、“长”天线 $r' \sim \lambda$
将线电流分布分解成
无数个电流元，每个
电流元看作电偶极子
(其长度趋于零，满
足远远小于波长的条
件)，用前面的公式
叠加

$$d\dot{p} = \frac{I(z')dz'}{j\omega}$$



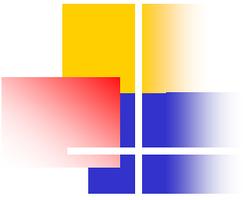


§ 8.4 线天线的辐射场

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d\dot{A}_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{-jkR}}{R} \dot{I}(z') dz' \\ d\dot{E}_\theta = \frac{j\omega\mu_0}{4\pi} \sin\theta' \frac{e^{-jkR}}{R} \dot{I}(z') dz' \text{ 其中 } R = |\vec{r} - \vec{r}'| \\ d\dot{H}_\phi = \frac{jk}{4\pi} \sin\theta' \frac{e^{-jkR}}{R} \dot{I}(z') dz' \end{array} \right.$$

$$r \rightarrow \infty \text{ 时, } \hat{\theta}' \approx \hat{\theta}, \sin\theta' \approx \sin\theta, \quad \frac{1}{R} \approx \frac{1}{r}$$

$$e^{-jkR} = e^{-jk[r - \vec{r}' \cdot \frac{\vec{r}}{r} + O(\frac{1}{r})]} \approx e^{-jk[r - \vec{r}' \cdot \frac{\vec{r}}{r}]} = e^{-jkr} e^{jk \cos\theta'}$$



§ 8.4 线天线的辐射场

$$\Rightarrow \dot{A}_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \int_l e^{jk \cos \theta z'} \dot{I}(z') dz'$$

$$\dot{E}_\theta = \frac{j\omega\mu_0}{4\pi} \sin \theta \frac{e^{-jkr}}{r} \int_l e^{jk \cos \theta z'} \dot{I}(z') dz'$$

$$d\dot{H}_\varphi = \frac{jk}{4\pi} \sin \theta \frac{e^{-jkr}}{r} \int_l e^{jk \cos \theta z'} \dot{I}(z') dz'$$

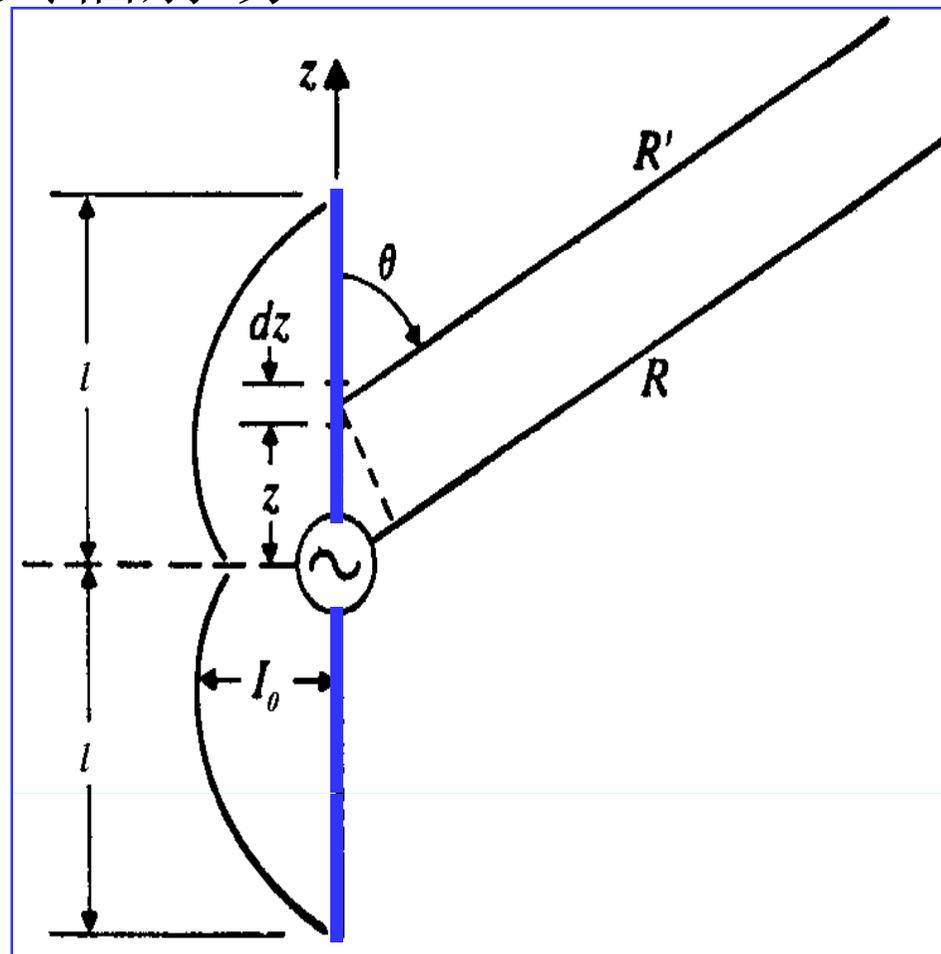
也可以直接用公式求

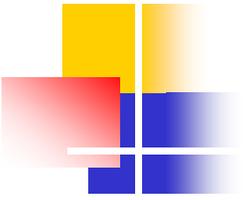
$$\text{体电流: } \dot{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{e^{-jkR}}{R} \dot{J}(r') dV'$$

$$\text{线电流: } \dot{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_l \frac{e^{-jkR}}{R} \dot{I}(z') \hat{z} dz'$$

§ 8.4 线天线的辐射场

例：一长度为 $2l$ 的线天线，其电流分布为 $I = I_0 \sin k(l - |z|)$ ，求其辐射场的电场强度和方向图。





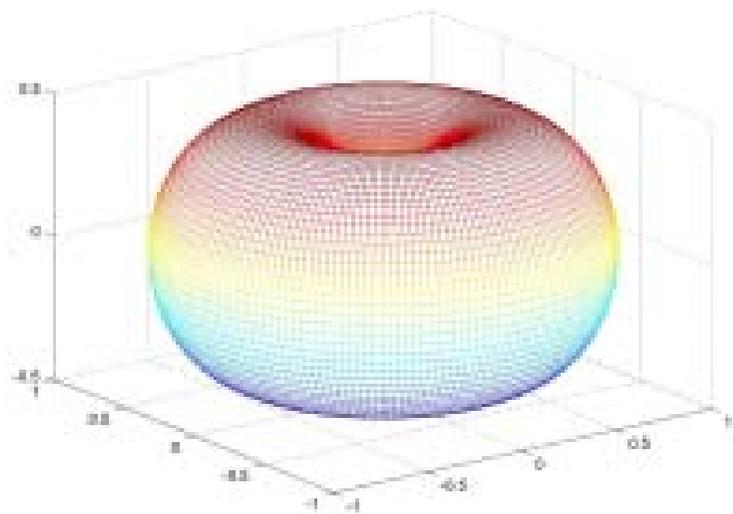
§ 8.4 线天线的辐射场

$$\begin{aligned}\text{解: } \dot{A}_z &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \int_l e^{jk \cos \theta z'} \dot{I}(z') dz' \\ \Rightarrow \dot{E}_\theta &= \frac{j\omega\mu_0}{4\pi} \sin \theta \frac{e^{-jkr}}{r} \int_l e^{jk \cos \theta z'} \dot{I}(z') dz' \\ &= \frac{j\omega\mu_0 I_0}{4\pi} \sin \theta \frac{e^{-jkr}}{r} \int_{-l}^l \sin[k(l - |z'|)] e^{jkz' \cos \theta} dz' \\ &= j \frac{\eta_0 I_0}{2\lambda r} \sin \theta e^{-jkr} \int_{-l}^l \sin[k(l - |z'|)] e^{jkz' \cos \theta} dz' \\ &= j \eta_0 \frac{I_0 e^{-jkr}}{2\pi r} \cdot \left[\frac{\cos(kl \cos \theta) - \cos(kl)}{\sin \theta} \right]\end{aligned}$$

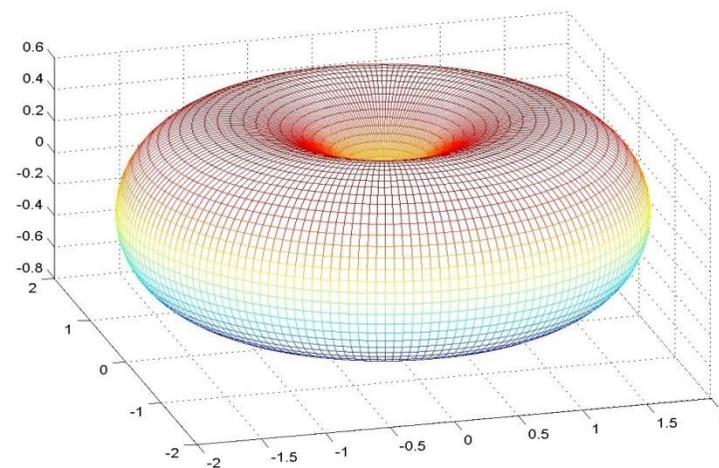
§ 8.4 线天线的辐射场

方向性函数：
$$F(\theta) = \frac{\cos(kl \cos \theta) - \cos(kl)}{\sin \theta}$$

不同长度振子的方向图：

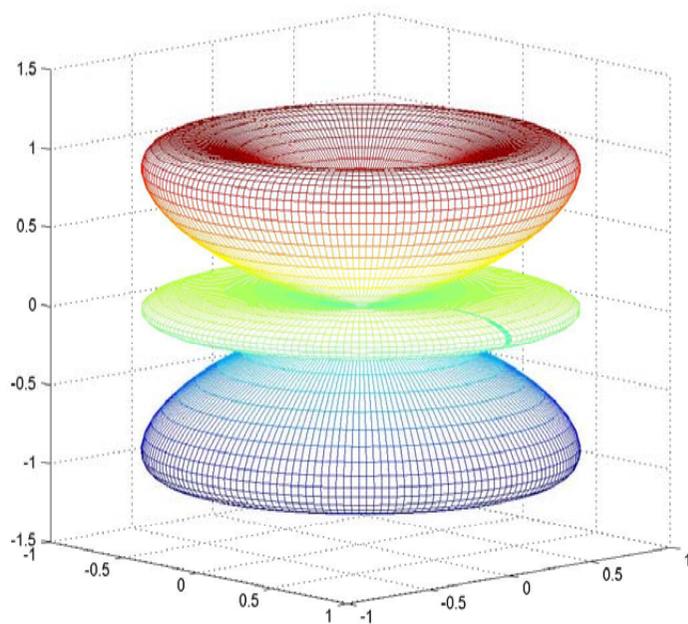


$$2l / \lambda = 1/2$$

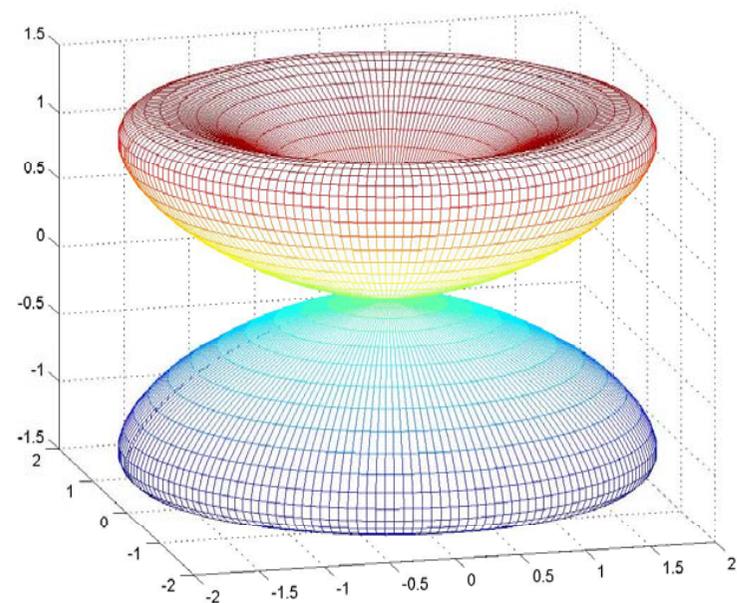


$$2l / \lambda = 1$$

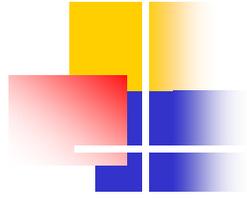
§ 8.4 线天线的辐射场



$$2l / \lambda = 3/2$$



$$2l / \lambda = 2$$



天线的基本参数

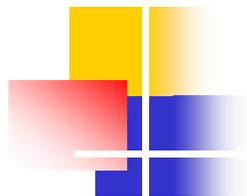
一、效率

定义：天线辐射出去的功率（即有效地转换电磁波部分的功率）和输入到天线的有功功率之比。

$$\eta_A = p_r / p_{in} = R_r / (R_r + R_d)$$

如果计入传输系统的效率 η_ϕ ，则整个系统的效率为：

$$\eta = \eta_\phi \cdot \eta_A$$



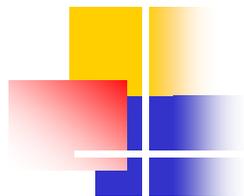
天线的基本参数

二、输入阻抗

指天线馈电点所呈现的阻抗值

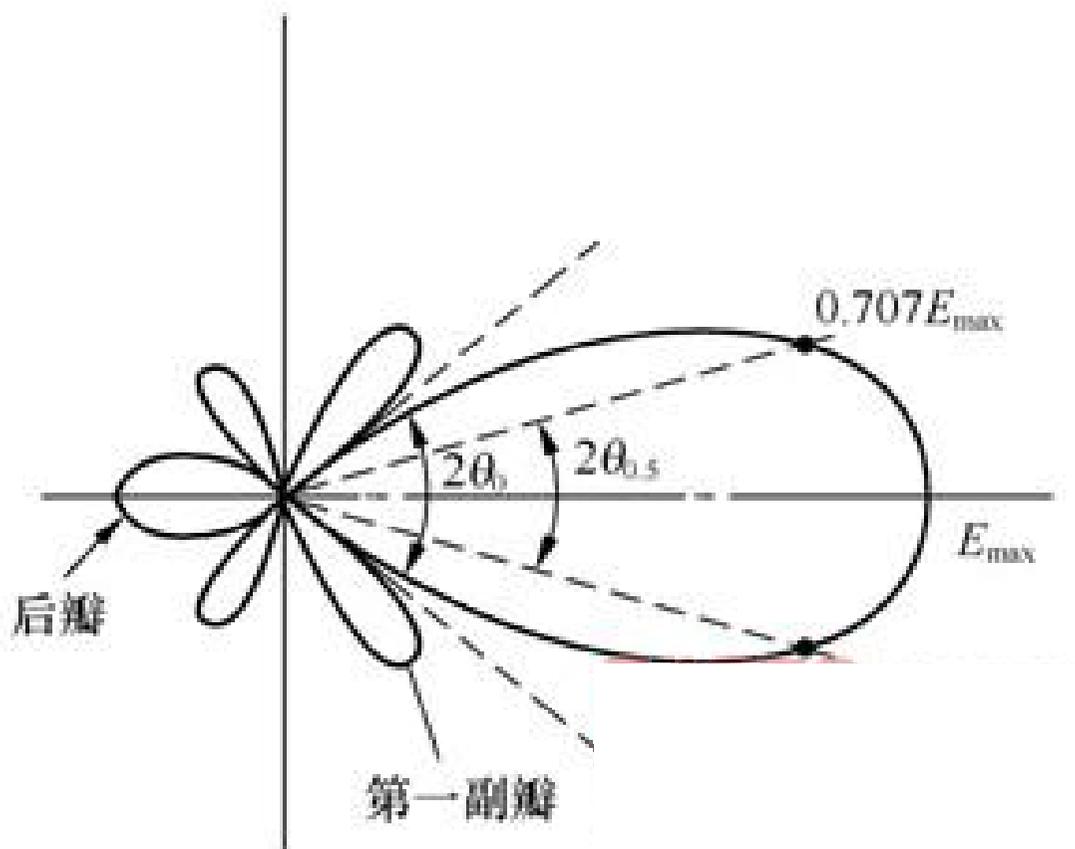
$$Z_{in} = \frac{P_{in}}{|I_{in}|^2} = \frac{V_{in}}{I_{in}}$$

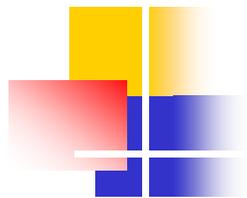
一般决定于天线本身的结构与尺寸、工作频率以及邻近天线周围物体的影响等。



天线的基本参数

三、方向图、主瓣宽度与旁瓣电平





天线的基本参数

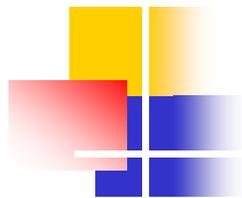
四、方向系数

五、极化

六、有效长度

在保持实际天线最大辐射方向上的场强值不变的条件下，假设天线上电流分布为均匀分布时天线的等效长度。

$$l_e = \frac{1}{I} \int_{-l}^l I(l) dl$$

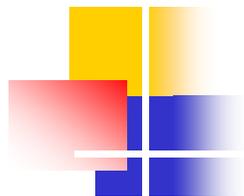


天线的基本参数

七、增益系数

在某方向某点产生相同电场强度的条件下，理想点源输入功率与某天线输入功率的比值，称为该天线在该方向上的增益系数。

$$G = \frac{P_{in0}}{P_{in1}} \Big|_{E \text{ 相同}} \stackrel{E_{\max} \text{ 处}}{=} D\eta_A$$

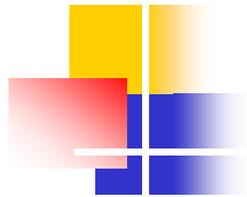


天线的基本参数

八、工作频带宽度

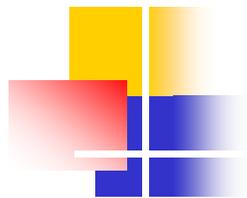
通常根据使用此天线的系统要求，规定天线电参数容许的变化范围，当工作频率变化时，天线参数不超过容许值得频率范围，称为天线的工作频率带宽。

九、功率容量

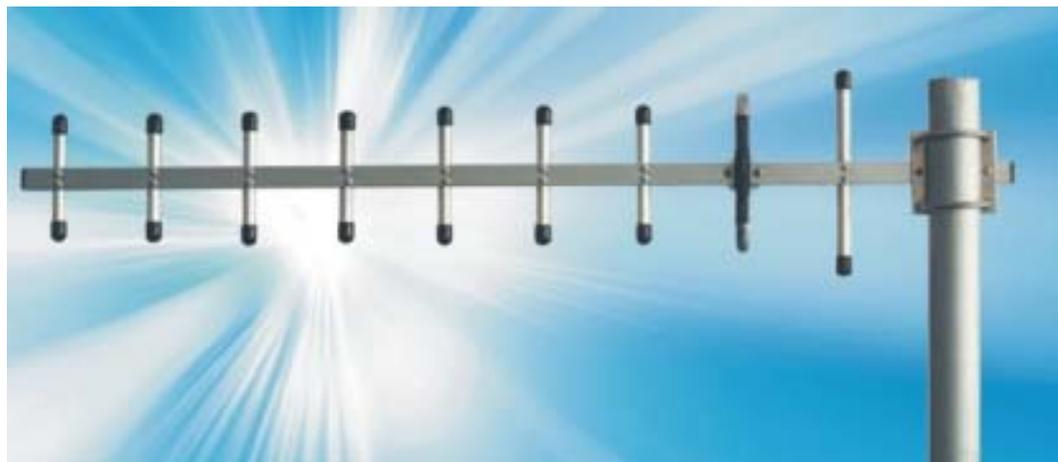


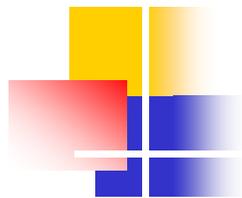
拉杆天线



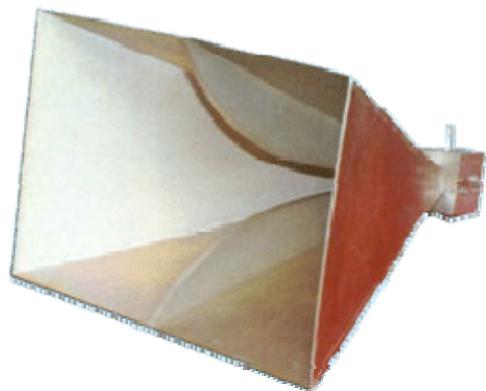


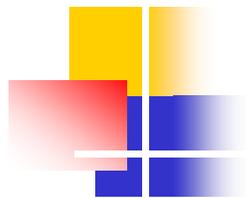
引向天线



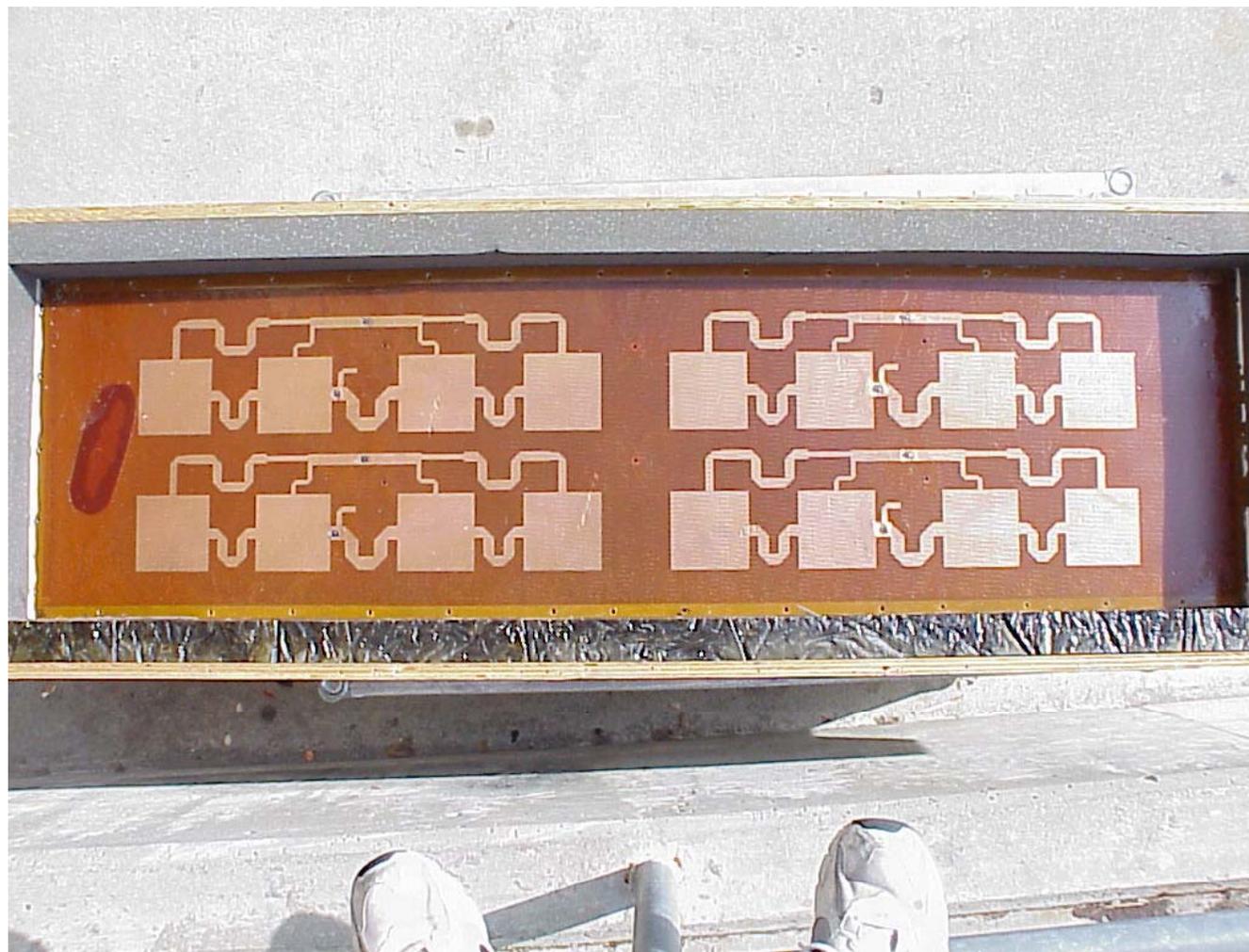


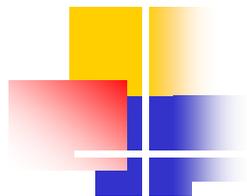
喇叭天线





微带天线





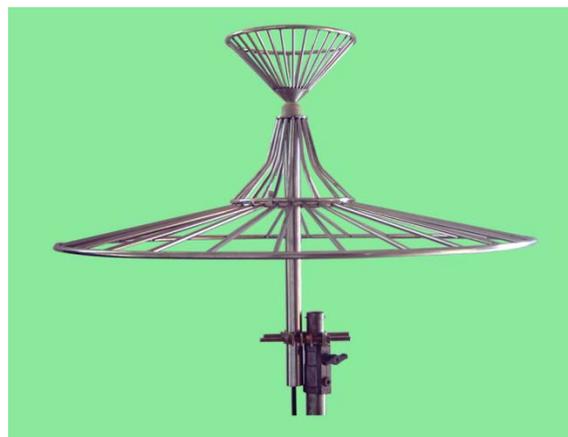
卫星接收天线

2.4米正馈卫星电视接收天线



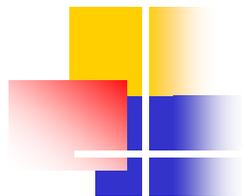
3m微波接力通信天线

宽带全向天线



中国远程相控阵雷达





舰载对空搜索雷达天线



相控阵雷达天线

螺旋天线



www.pripyat.com



俄军巨型雷达天线阵列

俄罗斯新型有源相控阵雷达天线

